Reptes

Problemes

Óscar Rivero
Universidade de Santiago de Compostela (Galícia)

La tardor no només ens porta l'inici d'un nou curs acadèmic, sinó també quatre nous problemes al *SCM/Notícies*. Miquel Amengual i Joaquim Nadal ens fan suggeriments engrescadors al voltant de la geometria clàssica, i José Luis Díaz ens proposa una suma no gaire senzilla. Finalment, proposem un problema de teoria de nombres sobre una qüestió aritmètica al voltant dels nombres perfectes.

Pel que fa a les solucions, n'hem rebut de Miquel Amengual, Marc Felipe, Ramon González, Pere Martínez, Joaquim Nadal i Bruno Salgueiro. Els agraïm a tots la seva dedicació, el temps emprat i les seves solucions originals. En publiquem, com és habitual, una selecció.

Us animem a tots a enviar les vostres propostes, tant de problemes com de solucions. S'han d'enviar preferiblement en TEX o LaTEX, i així mateix cal adjuntar els dibuixos corresponents en un format que sigui editable. Agrairem que sigui així per tal d'una ràpida i eficaç edició dels fitxers, gràcies! Les solucions i propostes de problemes envieu-les a

`riverosalgado@gmail.com`.

Problemes proposats

A185. (Proposat per Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca)

En un pla, siguin A, B, C, D quatre punts situats, en aquest ordre, sobre una línia recta ℓ.

En un dels dos semiplans determinats per ℓ, construïm els triangles equilàters ABP, BCQ i CDR.

1. Suposem que $AB + CD = BC$. Provau que
   1.1 $PQ = QR$.
   1.2 $\angle PQR = 120°$.
2. Suposem que $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{BC}$. Provau que
   2.1 $PQ : QR = AB : CD$.
   2.2 $\angle PQR = 120°$.

A186. (Proposat per la redacció.) Sigui $n > 6$ un nombre perfecte, i sigui $n = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$ la seva factorització en primers, amb $1 < p_1 < \ldots < p_k$. Proveu que e_1 és un nombre parell. (Recordeu que es diu que un nombre n és perfecte quan la suma dels seus divisors, excepte ell mateix, és igual a n).

A187. (Proposat per José Luis Díaz Barrero, UPC, Barcelona.) Sigui $n \geq 1$ un nombre enter, i per a qualsevol x real, denoti's per $\lfloor x \rfloor$ la seva part entera. Avalueu la suma

$$\sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{k}{\sqrt[k]{k!}} \right\rfloor.$$

A188. (Proposat per Joaquim Nadal i Vidal, Llagostera, Girona.) Sigui ABC un triangle isòsceles rectangle a C. Siguin P i Q punts sobre la hipotenusa, amb el punt P entre A i Q, de manera que $\angle PCQ = 45°$. Proveu que

$$AP^2 + BQ^2 = PQ^2.$$

Solucions

A181. (Proposat per Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca; dedicat a la memòria de Joan Girbau)

Sobre els costats d'un quadrilàter convexe $ABCD$ construïm, al seu exterior, rectangles $ABPQ$, $BCRS$, $CDP'Q'$ i $DAR'S'$ tals que $AB : BP = BC : CR = CD : DP' = DA : AR' = 2 : 1$.

Si denotam per P'', Q'', R'', S'' els respectius punts mitjans dels segments PP', QQ', RR', SS', provau que el quadrilàter $P''Q''R''S''$ és un quadrat.

Solució: (Solució inspirada per la de Pere Martínez, l'Hospitalet de Llobregat, modificada lleugerament per la redacció.)

Posem l'origen d'un sistema cartesià de coordenades en A i suposem $B\,(a, 0)$, $C\,(b, c)$, $D\,(e, f)$.

És clar que, en aquest sistema de referència, els vèrtexs P, Q del rectangle $ABPQ$ tenen coordenades $P\,(a, -\frac{a}{2})$, $Q\,(0, -\frac{a}{2})$.

Considerem ara el rectangle $BCRS$. Sigui M el punt mitjà del costat BC i indiquem per C^*, M^*, S^* els respectius peus de les perpendiculars tirades des de C, M, S sobre la recta AB. Els triangles rectangles MM^*B i BS^*S són iguals: els dos són semblants i tenen igual la hipotenusa.

Així, doncs,

$$BS^* = MM^* = \frac{1}{2}\overline{CC^*} = \frac{1}{2}c$$

i

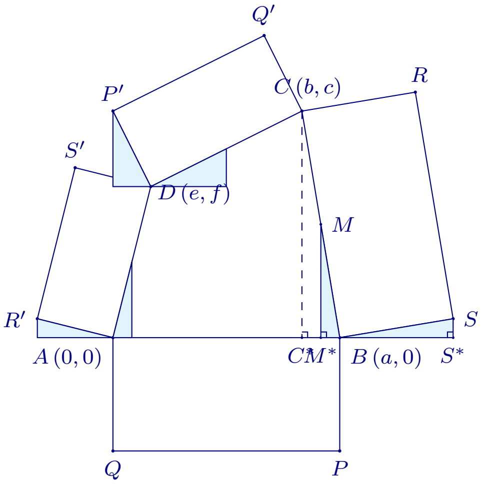
$$SS^* = M^*B = \frac{1}{2}\overline{C^*B} = \frac{1}{2}\left(AB - AC^*\right)$$

i per tant l'abscissa de S és $a + \frac{c}{2}$ i la seva ordenada és $\frac{1}{2}\left(a - b\right)$.

És a dir:

$$S\left(a + \frac{c}{2}, \frac{a-b}{2}\right).$$

Una vegada conegudes les coordenades de S, la fórmula de les del punt mitjà d'un segment permet conèixer immediatament les coordenades de R, obtenint $R\left(b + \frac{c}{2}, c + \frac{a-b}{2}\right)$.



Repetint per a les altres dues parelles de triangles rectangles de la figura el que acabam de fer, s'obté

$$P'\left(d - \frac{c-e}{2}, e + \frac{b-d}{2}\right),$$

$$Q'\left(b - \frac{c-e}{2}, c + \frac{b-d}{2}\right),$$

$$R'\left(-\frac{e}{2}, \frac{d}{2}\right),$$

$$S'\left(d - \frac{e}{2}, e + \frac{d}{2}\right),$$

d'on deduïm que els punts P'', Q'', R'', S'' tenen les següents coordenades

$$P''\left(\frac{2a-c+2d+e}{4}, \frac{-a+b-d+2e}{4}\right),$$

$$Q''\left(\frac{2b-c+e}{4}, \frac{-a+b-d+2c}{4}\right),$$

$$R''\left(\frac{2b+c-e}{4}, \frac{a-b+2c+d}{4}\right),$$

$$S''\left(\frac{2a+c+2d-e}{4}, \frac{a-b+d+2e}{4}\right),$$

de les quals, al seu torn, se'n dedueix que

(i) Els segments $P''R''$ i $Q''S''$ es bisequen mútuament (en el punt $\left(\frac{a+b+d}{4}, \frac{c+e}{4}\right)$).

(ii) Els pendents de les rectes $P''R''$ i $Q''S''$, $m_{P''R''} = \frac{a-b+c+d-e}{-a+b+c-d-e}$ i $m_{Q''S''} = \frac{a-b-c+d+e}{a-b+c+d-e}$, compleixen

$$m_{P''R''} \cdot m_{Q''S''} + 1 = 0$$

(iii Els segments $P''R''$ i $Q''S''$ tenen la mateixa longitud,

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(a-b+d)^2+(c-e)^2}\right).$$

En conseqüència, el quadrilàter $P''Q''R''S''$ és un paral·lelogram. Per (ii), aquest paral·lelogram és un rombe. Finalment, per (iii), aquest rombe és un quadrat.

A182. (Proposat per Marc Felipe i Alsina, UPC, Barcelona.) Sigui $n \geq 2$ un nombre enter. Determineu de quantes maneres es poden situar els nombres $1, 2, 3, \ldots, 2n$ en les caselles d'un tauler $2 \times n$, un en cada casella, de manera que dos nombres consecutius qualssevol sempre es trobin en caselles que comparteixin un costat. (Per exemple, si $n = 2$ podeu veure que la resposta és 8).

Solució: (Solució del proponent)

Sigui a_n el nombre de camins com els que hem descrit a l'enunciat i que comencen per la cantonada superior esquerra. Per simetria, hi ha a_n camins que comencen en cadascuna de les altres cantonades. Suposem que el primer pas és cap a la dreta; aleshores, el camí ha de continuar cap a la dreta fins que arriba a la cantonada superior dreta, ja que altrament es tallaria el tauler en dues parts. En canvi, si el primer pas és cap avall, el següent és cap a la dreta i el camí es pot completar de a_{n-1} maneres. Per tant, $a_n = a_{n-1} + 1$, i com que $a_2 = 2$, per inducció se segueix que $a_n = n$.

Vegem ara el nombre de camins que comencen en la casella superior de la j-èssima columna, amb $1 < j < n$. Si el primer pas és cap a la dreta, llavors el camí segueix cap a la dreta, arriba a la cantonada superior dreta i torna cap a l'esquerra fins que passa per la columna j-èssima de nou. Ara es pot completar de $a_{j-1} = j-1$ maneres. De la mateixa manera, si va cap a l'esquerra es pot completar de $a_{n-j} = n-j$ maneres. En total, tenim $(j-1)+(n-j) = n-1$ camins, i la resposta és

$$4n + 2 + 2\sum_{j=2}^{n-1}(n-1) = 2n^2 - 2n + 4.$$

A183. (Proposat per José Luis Díaz Barrero, UPC, Barcelona.) Sigui α un nombre real amb $0 \leq \alpha \leq 1$. Sigui $\{a_n\}_{n\geq 1}$ una successió definida per $a_1 = 0$ i

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}(\alpha - a_n^2) \text{ per a tot } n \geq 1.$$

Proveu que existeix el límit de la successió $\{a_n\}_{n\geq 1}$ quan n tendeix cap a infinit i calculeu-lo.

Solució: (Solució de Marc Felipe i Alsina, UPC, Barcelona)

Comencem provant que $0 \leq a_n \leq \sqrt{\alpha}$ per a tot n. Suposi's que $0 \leq a_n \leq \sqrt{\alpha}$ i provem-ho per a $n+1$. Com que $a_n \geq 0$ i $\alpha \geq a_n^2$, es té que

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}(\alpha - a_n^2) \geq 0.$$

Per l'altra banda, de la condició $\sqrt{\alpha} + a_n \leq 2\sqrt{\alpha} \leq 2$ es té, multiplicant pel conjugat,

$$\alpha - a_n^2 \leq 2(\sqrt{\alpha} - a_n).$$

Reagrupant termes i usant la definició de a_{n+1} comprova que

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}(\alpha - a_n^2) \leq \alpha.$$

Com que el resultat és trivial per a $n = 1$, la conclusió se segueix per inducció. Aleshores, $\{a_n\}$ està fitada i és creixent, ja que

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(\alpha - a_n^2) \geq 0.$$

Es té, doncs, que el límit existeix i el seu valor ℓ és la solució de l'equació

$$\ell = \ell + \frac{1}{2}(\alpha - \ell^2).$$

Per tant, $\ell = \sqrt{\alpha}$, i això conclou el problema.

A184. (Proposat per Joaquim Nadal i Vidal, Llagostera, Girona.)

En el triangle ABC, sigui $L \in BC$, $M \in CA$ i $N \in AB$ de manera que $BL = \ell \cdot BC$, $CM = m \cdot CA$ i $AN = n \cdot AB$. Considerem els punts $P = AL \cap BM$, $Q = BM \cap CN$ i $R = CN \cap AL$. Sabent que l'àrea del triangle PQR és 1, trobeu l'àrea del triangle ABC en funció de ℓ, m i n.

Solució: (Solució de Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)

Sigui X el punt del costat CA del triangle ABC i Y el punt de la ceviana CN tals que (Figura 1)

$$NX \parallel BC \parallel YM.$$

Atès que els triangles ANX i ABC són semblants, serà

$$\frac{XA}{CA} = \frac{NX}{BC} = \frac{AN}{AB} = (\text{per hipòtesi}) = n. \quad (1)$$

I atès que els triangles NCX i YCM també són semblants,

$$\frac{YM}{NX} = \frac{CM}{CX} = \frac{CM}{CA - XA} = \frac{\frac{CM}{CA}}{1 - \frac{XA}{CA}} = \frac{m}{1-n},$$

d'on deduïm, tenint present (1), que

$$\frac{YM}{BC} = \frac{YM}{NX} \cdot \frac{NX}{BC} = \frac{mn}{1-n}.$$

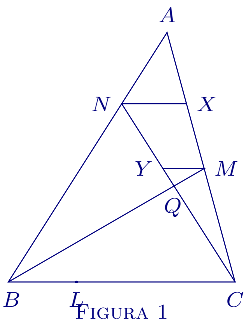


Figura 1

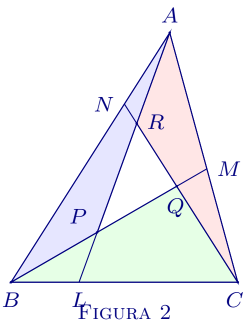


Figura 2

Ara bé, els triangles MYQ i BCQ són semblants, i per tant

$$\frac{QM}{BQ} = \frac{YM}{BC}.$$

En conseqüència,

$$\frac{QM}{BQ} = \frac{mn}{1-n}. \tag{2}$$

Posem $[UVW]$ per a denotar, d'ara endavant, l'àrea del triangle UVW.

Com que els triangles QMC i BQC tenen la mateixa altura (corresponent al vèrtex C), les seves àrees estan en la raó (2). Tindrem:

$$\frac{[QMC]}{[BQC]} = \frac{mn}{1-n}.$$

Sumant 1 als dos membres i tenint en compte que $[BQC] + [QMC] = [MBC]$, es té

$$\frac{[MBC]}{[BQC]} = \frac{mn - n + 1}{1 - n}. \tag{3}$$

Al seu torn, els triangles MBC i ABC tenen la mateixa altura (corresponent al vèrtex B). Per tant, les seves àrees estan en la raó de les seves bases CM i CA.

És a dir:

$$\frac{[MBC]}{[ABC]} = \frac{CM}{CA} = m. \tag{4}$$

Eliminant $[MBC]$ entre (3) i (4), s'obté

$$[BQC] = \frac{m\,(1-n)}{mn - n + 1}\,[ABC]\,.$$

Argumentant de manera similar al cas anterior, obtenim

$$[CRA] = \frac{n\,(1-\ell)}{n\ell - \ell + 1}\,[ABC]$$

i de la mateixa manera

$$[APB] = \frac{\ell\,(1-m)}{\ell m - m + 1}\,[ABC]\,.$$

Substituint tot això a

$$[PQR] = [ABC] - [BQC] - [CRA] - [APB]\,,$$

s'obté que el quocient $\frac{[PQR]}{[ABC]}$ és igual a

$$1 - \frac{m\,(1-n)}{mn - n + 1} - \frac{n\,(1-\ell)}{n\ell - \ell + 1} - \frac{\ell\,(1-m)}{\ell m - m + 1}.$$

Com que $[PQR] = 1$, resulta

$$[ABC] = \frac{1}{1 - \frac{m(1-n)}{mn-n+1} - \frac{n(1-\ell)}{n\ell-\ell+1} - \frac{\ell(1-m)}{\ell m-m+1}}.$$